Vektorska teorija polja

Skalarno polje je f-ja $u = f(T) = f(x, y, z)$ u oblasti prostora ili na površi (na primjer, temperatura u svakoj tački prostora, nadmorska visina tačke i dr.) Skalarno polje se predstavlja nivoskim površima tj. površima s jednačinom $u = c \cdot f(T) = c \cdot f(x,y,z)$ (gdje je c-konstanta) i u ima neprekidne parcijalne izvode koji se ne anuliraju istovremeno).

Na primjer $u = x^2 + y^2 + z^2$ je skalarno polje.

Ranije smo spomenuli da je gradijent f-je $u = f(x,y,z)$, date u nekoj oblasti prostora, vektor čije su projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$. Označava se simbolom

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Izvod u pravcu gradijenta u datoj tački dostiže najveću vrijednost jednaku $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ tj. pravac gradijenta je pravac najbržeg rasta f-je.

Vektorsko polje je oblast prostora u čijoj je svakoj tački definisan vektor.

$\vec{v} = (V_x, V_y, V_z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ gdje su V_x, V_y, V_z skalarna polja.

Na primjer $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + x^2 \vec{j} + xyz^2 \vec{k}$ je vektorsko polje.

Nabla operator (∇ operator ili Hamiltonov operator) je diferencijalni operator oblika $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ gdje su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični ortogonalni vektori.

Ako je $u = f(x,y,z)$ skalarna f-ja biće

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} f$$

Ako je $\vec{v} = (V_x, V_y, V_z)$ vektorska f-ja onda je $\nabla \vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Važne osobine vektorskog polja su divergencija i rotor vektorskog polja

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$ (skalarni proizvod ∇ i $\vec{v}$)

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$ (vektorski proizvod ∇ i $\vec{v}$)

Ako je $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ tada kažemo da je $\vec{v}$ solenoidno polje.
Ako je $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ tada kažemo da je $\vec{v}$ potencijalno polje.
F-ju u za koju vrijedi da je $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ zovemo potencijalom polja $\vec{v}$.

relacija $u(x, y, z) = C$ gdje je C konstanta, predstavlja površ koju zovemo ekviskalarna površ (nivo površ) skalarnog polja

(#) Nađi veličinu i pravac gradijenta skalarnog polja: a) $u = x^2 + y^2 + z^2$ u tački $T(2, -2, 1)$

b) $u = xyz$ u tački $T(1, 2, 3)$.

Rj. a) $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

$\operatorname{grad} u = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \operatorname{grad} u(T) = (4, -4, 2)$

$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ veličina gradijenta

$\frac{\operatorname{grad} u(T)}{|\operatorname{grad} u(T)|} = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{2}{6} \right) = \left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{\cos\alpha}, \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\cos\beta}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{\cos\gamma} \right)$ jedinični vektor pravca gradijenta

$\alpha = \arccos \frac{2}{3}$

$\beta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\gamma = \arccos \frac{1}{3}$

b) $|\operatorname{grad} u(T)| = 7$ $\qquad \frac{\operatorname{grad} u(T)}{|\operatorname{grad} u(T)|} = \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right)$

(#) Dato je skalarno polje $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$. U kojim tačkama je a) $\operatorname{grad} u=\vec{0}$

b) $\vec{k}\cdot\operatorname{grad} u=0$.

Rj.

a) $\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$\operatorname{grad} u=(3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy)$

$$\operatorname{grad} u=\vec{0} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x^2-3yz=0 \\ 3y^2-3xz=0 \\ 3z^2-3xy=0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x^2-yz=0 & (I) \\ y^2-xz=0 & (II) \\ z^2-xy=0 & (III) \end{array}$$

Trivijalno rješenje sistema je $x=0,\ y=0,\ z=0$.
Ako pomnožimo (I) sa $\underset{x\neq 0}{x}$, (II) sa $\underset{y\neq 0}{y}$ i (III) sa $\underset{z\neq 0}{z}$ dobijamo

$$\begin{array}{l} x^3-xyz=0 \\ y^3-xyz=0 \\ z^3-xyz=0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} xyz=x^3 \\ xyz=y^3 \\ xyz=z^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x^3=y^3=z^3 \\ x=y=z \end{array}$$

Ako ovu zadnju jednakost napišemo u obliku $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$ (prava u prostoru) vidimo da je $\operatorname{grad} u=\vec{0}$ za sve tačke ove prave.

b) $\operatorname{grad} u=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}+(3z^2-3xy)\vec{k}$

$\vec{k}\cdot\operatorname{grad} u = 3z^2-3xy=0$

$\vec{k}\cdot\operatorname{grad} u=0$ je za sve tačke krive $z^2-xy=0$

(#) Odrediti ugao kojeg zatvaraju gradijenti polja $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i $u=x-3y+\sqrt{3xy}$ u tački $A(3,4)$.

Rj. Gradijent f-je $z=f(x,y)$ se računa po formuli

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x,\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$u=x-3y+\sqrt{3xy},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{1}{2\sqrt{3xy}}\cdot 3y=1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}$$

$$\operatorname{grad} u=\left(1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}},\ -3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right).$$

$$A(3,4),\quad \operatorname{grad} z(A)=\left(\frac{3}{\sqrt{9+16}},\ \frac{4}{\sqrt{9+16}}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j},$$

$$\operatorname{grad} u(A)=\left(1+\frac{12}{2\sqrt{36}},\ -3+\frac{9}{2\sqrt{36}}\right)=\left(1+1,\ -3+\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{12}_{\,4}}\right)=$$

$$=\left(2,-\frac{9}{4}\right)=2\vec{i}-\frac{9}{4}\vec{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

U našem slučaju $\vec{a}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $\vec{b}=\left(2,-\frac{9}{4}\right)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}-\frac{36}{20}=\frac{24-36}{20}=\frac{-12}{20}=\frac{-3}{5}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{4+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{64+81}{16}}=\frac{\sqrt{145}}{4}$$

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{3}{5}}{1\cdot\frac{\sqrt{145}}{4}}=\frac{-12}{\sqrt{145}} \Rightarrow \varphi=\arccos\left(\frac{-12}{\sqrt{145}}\right)$$ ugao kojeg zatvaraju gradijenti polja

Odrediti divergenciju i rotor vektorskih polja

a) $\vec{v} = (y^2+z^2)\vec{i} + (z^2+x^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$

b) $\vec{v} = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$

Rj. a) $\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$, $\quad (\vec{v} = (V_x, V_y, V_z))$

$V_x = y^2 + z^2 \qquad \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

$V_y = z^2 + x^2 \qquad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0+0+0 = 0$

$V_z = x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$

divergencija vektorskog polja

Kako je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ to je polje $\vec{v}$ solenoidno

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(V_x, V_y, V_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial V_z}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 2z$

$\frac{\partial V_z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 2z$

$\frac{\partial V_y}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 2y$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (2y-2z)\vec{i} - (2x-2z)\vec{j} + (2x-2y)\vec{k} = (2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y)$$

rotor vektorskog polja

Kako je $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$ to polje nije potencijalno polje.

b) URADITI ZA VJEŽBU

Rj. $\operatorname{div}\vec{v} = 6xyz$

$\operatorname{rot}\vec{v} = (yx^2 - yz^2)\vec{j} + (zy^2 - zx^2)\vec{k} + (xz^2 - xy^2)\vec{i}$.

(#) Izračunati ∇u ako je $u=f(r)$, $\vec{a}=(x,y,z)$ je vektor položaja tačke $M(x,y,z)$ i $r=|\vec{a}|$.

Rj. Da li je u vektorska ili skalarna f-ja?

$$r=|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ je skalarna f-ja

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \quad u=f(r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f_r'\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x'=f_r'\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f_r'\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=f_r'\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_y'=f_r'\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f_r'\cdot\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=f_r'\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_z'=f_r'\cdot\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f_r'\cdot\frac{z}{r}$$

$$\nabla u=\left(f_r'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ f_r'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ f_r'\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$=\frac{f_r'}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=f_r'\cdot\frac{\vec{a}}{r}$$

(#) Iskoristiti prethodni zadatak i izračunati $\nabla\frac{1}{r}$.

Rj. Ako stavimo $f(r)=\frac{1}{r}$ u prethodni zadatak dobijamo:

$$f_r'=\left(\frac{1}{r}\right)_r'=\frac{-1}{r^2}$$

$$\nabla u=\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{a}}{r}=\frac{-1}{r^3}\vec{a}$$

(#) Dokazati da je vektorsko polje potencijalno i naći njegov potencijal:

$$\vec{v} = 2x(y^2+z^2)\vec{i} + 2y(x^2+z^2)\vec{j} + 2z(x^2+y^2)\vec{k}.$$

Rj. Vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno ako je $\text{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$.
Rotor vektorskog polja $\text{rot}\,\vec{v}$ se računa ..

$$\text{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

(vektorski proizvod Nabla (∇) operatora i vektorskog polja $\vec{v}$)

$V_x = 2x(y^2+z^2)$ $\quad$ $V_y = 2y(x^2+z^2)$ $\quad$ $V_z = 2z(x^2+y^2)$

$\frac{\partial V_x}{\partial y} = 4xy$ $\quad$ $\frac{\partial V_y}{\partial x} = 4xy$ $\quad$ $\frac{\partial V_z}{\partial x} = 4xz$

$\frac{\partial V_x}{\partial z} = 4xz$ $\quad$ $\frac{\partial V_y}{\partial z} = 4yz$ $\quad$ $\frac{\partial V_z}{\partial y} = 4yz$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}(4yz-4yz) - \vec{j}(4xz-4xz) + \vec{k}(4xy-4xy)$$

$$= (0,0,0) = \vec{0}$$ vektorsko polje je potencijalno

Potencijal polja $\vec{v}$ je f-ja u za koju vrijedi $\vec{v} = \text{grad}\,u$.

$$\text{grad}\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x(y^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y(x^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

$u = u(x,y,z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$u = \int 2x(y^2+z^2)\,dx + \varphi(y,z)$$

$u = x^2(y^2+z^2) + \varphi(y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 2yx^2 + \varphi'_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2x^2z + \varphi'_z \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $\varphi'_y = 2yz^2$, $\varphi'_z = 2zy^2$ ... (*)

Odredimo f-ju φ $\quad \varphi = \int 2yz^2\,dy + \psi(z)$

$\varphi = y^2z^2 + \psi(z)$

$\varphi'_z = 2y^2z + \psi'_z$ ... (**)

(*) i (**) $\Rightarrow$ $\psi'_z = 0$ $\Rightarrow$ $\psi(z) = C$

$\Rightarrow \varphi = y^2z^2 + C$ $\Rightarrow$ $u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + C$

Potencijal vektorskog polja je $u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + C$

(#) Odrediti konstante a, b i c tako da vektorsko polje $\vec{v}=(x+2y+az)\vec{i}+(bx-3y-z)\vec{j}+(4x+cy+2z)\vec{k}$ bude potencijalno i naći njegov potencijal.

Rj. Ako je $\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{0}$ tada je vektorsko polje $\vec{v}$ potencijalno.

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}\qquad \begin{aligned}V_x&=x+2y+az\\ V_y&=bx-3y-z\\ V_z&=4x+cy+2z\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y}=c\quad \frac{\partial V_y}{\partial z}=-1\qquad \frac{\partial V_y}{\partial x}=b$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x}=4\qquad \frac{\partial V_x}{\partial z}=a\qquad \frac{\partial V_x}{\partial y}=2$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=(c+1)\vec{i}-(4-a)\vec{j}+(b-2)\vec{k}=(c+1,\ a-4,\ b-2)$$

Za vrijednosti $a=4$, $b=2$ i $c=-1$ vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno polje.

$$\vec{v}=(x+2y+4z,\ 2x-3y-z,\ 4x-y+2z)$$

Potencijal polja $\vec{v}$ je f-ja u koja zavisi od 3 promjenjive $u=u(x,y,z)$ i za koju vrijedi $\vec{v}=\operatorname{grad}u$.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Nađimo f-ju u.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+2y+4z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x-3y-z\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=4x-y+2z\quad \ldots(*)$$

$$u=\int(x+2y+4z)\,dx+\varphi(y,z)$$

$$u=\frac{1}{2}x^2+(2y+4z)x+\varphi(y,z)\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=2x+\varphi'_y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=4x+\varphi'_z\ \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\ \varphi'_y=-3y-z\ ;\ \varphi'_z=-y+2z\quad\ldots(**)$$ Odredimo f-ju φ.

$$\varphi=\int(-3y-z)dy+\psi(z)=-\frac{3}{2}y^2-yz+\psi(z)$$

$$\varphi'_z=-y+\psi'_z\ \overset{(**)}{\Longrightarrow}\ \psi'_z=2z\Rightarrow\psi(z)=\int 2z\,dz=z^2+c$$

$$\varphi(y,z)=-\frac{3}{2}y^2-yz+z^2+c\Rightarrow u=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz-\frac{3}{2}y^2-yz+z^2+c$$

(#) Dato je vektorsko polje $\vec{A} = (e^x z - 2xy, 1-x^2, e^x + z)$. Pokazati da je polje $\vec{A}$ potencijalno i odrediti mu potencijal. Izračunati integral $\int_L \vec{A}\cdot d\vec{r}$ gdje je L duž PQ, $P(0,1,-1)$, $Q(2,3,0)$ orijentisana od tačke P prema tački Q.

Rj. Ako je rotor vektorskog polja $\vec{A}$ jednak $\vec{0}$ ($\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$), tada za $\vec{A}$ kažemo da je <u>potencijalno polje</u>.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x z - 2xy & 1-x^2 & e^x + z \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\vec{i} - (e^x - e^x)\vec{j} + (-2x+2x)\vec{k} = (0,0,0) \Rightarrow$$ $\vec{A}$ je potencijalno polje

F-ju $u = u(x,y,z)$ za koju vrijedi da je $\vec{A} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ zovemo <u>potencijal polja</u> $\vec{A}$.

$$\vec{A} = (e^x z - 2xy, 1-x^2, e^x + z)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$u = \int (e^x z - 2xy)\,dx + \varphi(y,z)$$

$$u = e^x z - x^2 y + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + \varphi'_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - x^2$$

$$\varphi'_y = 1$$

$$\varphi(y,z) = y + \psi(z) \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^x + \varphi'_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^x + z$$

$$\varphi'_z = z \Rightarrow \varphi(y,z) = \frac{z^2}{2} + \psi(y) \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \varphi(y,z) = y + \frac{z^2}{2}$$

Potencijal vektorskog polja $\vec{A}$ je $u = e^x z - x^2 y + y + \frac{z^2}{2} + C$

$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{r}$ zovemo <u>cirkulacija vektorskog polja</u> $\vec{A}$ duž krive L

$C = \int \vec{A}\,d\vec{r} = \int V_x dx + V_y dy + V_z dz$ gdje je $\vec{A} = (V_x, V_y, V_z)$, $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

$$C=\int_L (e^x z-2xy)\,dx+(1-x^2)\,dy+(e^x+z)\,dz$$

ovo je krivolinijski integral druge vrste po krivoj duži u prostoru

Prisjetimo se, ako je c kriva u ravni opisana parametarskim jednačinama $x=\eta(t)$, $y=\mu(t)$ gdje je $t_1\le t\le t_2$ tada krivolinijski integral se računa

$$\int_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{t_1}^{t_2}\Big(P(\eta(t),\mu(t))\eta'(t)+Q(\eta(t),\mu(t))\mu'(t)\Big)\,dt$$

Postavimo pravu kroz dvije date tačke $P(0,1,-1)$ i $Q(2,3,0)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ jednačina prave kroz dvije tačke

$P(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{1},\overset{z_1}{-1})$

$Q(\overset{x_2}{2},\overset{y_2}{3},\overset{z_2}{0})$

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}\quad(=t)$$

$$L:\begin{cases}x=2t & dx=2\,dt\\ y=2t+1 & dy=2\,dt\\ z=t-1 & dz=dt\\ 0\le t\le 1\end{cases}$$

$$C=\int_0^1\Big(2\cdot\big(e^{2t}(t-1)-2\cdot 2t\cdot(2t+1)\big)+(1-4t^2)\cdot 2+\big(e^{2t}+(t-1)\big)\Big)\,dt$$

$$=\int_0^1\left(2e^{2t}t-2e^{2t}-16t^2-8t+2-8t^2+e^{2t}+t-1\right)dt$$

$$=\int_0^1 2e^{2t}t\,dt-\int_0^1 e^{2t}\,dt-24\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1(-7t+1)\,dt=\ldots=-\frac{19}{2}$$

$$2\int_0^1 e^{2t}t\,dt=\left|\begin{matrix}u=t & dv=e^{2t}dt\\ du=dt & v=\frac{1}{2}e^{2t}\end{matrix}\right|=2\frac{1}{2}te^{2t}\Big|_0^1-2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}\,dt=$$

$$=e^2-\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^1=e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

(#) Dokazati da je vektorsko polje potencijalno i naći njegov potencijal:

$$\vec{v} = 2x(y^2+z^2)\vec{i} + 2y(x^2+z^2)\vec{j} + 2z(x^2+y^2)\vec{k}.$$

Rj. Vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno ako je $rot\,\vec{v} = \vec{0}$.

Rotor vektorskog polja $rot\,\vec{v}$ se računa:

$$rot\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

(vektorski proizvod Nabla (∇) operatora i vektorskog polja $\vec{v}$)

$V_x = 2x(y^2+z^2)$, $\quad V_y = 2y(x^2+z^2)$, $\quad V_z = 2z(x^2+y^2)$

$\frac{\partial V_x}{\partial y} = 4xy$, $\quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = 4xy$, $\quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = 4xz$

$\frac{\partial V_x}{\partial z} = 4xz$, $\quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 4yz$, $\quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = 4yz$

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}(4yz-4yz) - \vec{j}(4xz-4xz) + \vec{k}(4xy-4xy)$$

$= (0,0,0) = \vec{0}$ vektorsko polje je potencijalno

Potencijal polja $\vec{v}$ je f-ja u za koju vrijedi $\vec{v} = grad\,u$.

$$grad\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x(y^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y(x^2+z^2) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

$u = u(x,y,z)$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

$u = \int 2x(y^2+z^2)\,dx + \varphi(y,z)$

$u = x^2(y^2+z^2) + \varphi(y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 2yx^2 + \varphi'_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2x^2z + \varphi'_z \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $\varphi'_y = 2yz^2$, $\quad \varphi'_z = 2zy^2 \ldots (*)$

Odredimo f-ju φ: $\varphi = \int 2yz^2\,dy + \psi(z)$

$\varphi = y^2z^2 + \psi(z)$

$\varphi' = 2y^2z + \psi' \ldots (**)$

(*) i (**) $\Rightarrow$ $\psi'_z = 0 \Rightarrow \psi(z) = c$

$\Rightarrow \varphi = y^2z^2 + c \Rightarrow u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + c$

Potencijal vektorskog polja je $u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + C$

(#) Odrediti brojeve a i b tako da vektorsko polje $\vec{v} = (yz + axy,\ xz + bx^2 + yz^2,\ axy + y^2 z)$ bude potencijalno i za dobijeno polje izračunati njegovu cirkulaciju duž pravoliniske konture od tačke $A(1,1,1)$ prema tački $B(2,2,2)$.

Rj: Za vektorsko polje $\underbrace{\vec{v}}_{}$ $(\vec{v} = (v_x, v_y, v_z))$ kažemo da je potencijalno ako je $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Znamo da

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + axy & xz + bx^2 + yz^2 & axy + y^2 z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(ax + \cancel{2yz} - x - \cancel{2yz},\ -(ay - y),\ z + 2bx - z - ax \right)$$

$$= (ax - x,\ y - ay,\ 2bx - ax).$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \implies \begin{array}{c} ax - x = 0 \\ y - ay = 0 \\ \underline{2bx - ax = 0} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

Za $a = 1$ i $b = \frac{1}{2}$ vektorsko polje $\vec{v}$ je potencijalno polje.

Cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}$ duž krive c tražimo po formuli

$$C = \int_c \vec{v}\, d\vec{r} = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

Kriva c je dio prave od tačke $A(1,1,1)$ do tačke $B(2,2,2)$.

(A: x_1, y_1, z_1; B: x_2, y_2, z_2)

Kako glasi jednačina prave u prostoru kroz dvije tačke?

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \implies \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \ (= t) \qquad \begin{array}{c} x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z - 1 = t \end{array}$$

Krivulja c u parametarskom obliku

$$c: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = t+1 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = dt \\ dz = dt \end{matrix}$$

U našem slučaju

$$C = \int_c (yz + xy)\,dx + (xz + \tfrac{1}{2}x^2 + yz^2)\,dy + (xy + y^2 z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 \left[(t+1)^2 \; {}^{+(t+1)^2} + (t+1)^2 + \tfrac{1}{2}(t+1)^2 + (t+1)^3 + (t+1)^2 + (t+1)^3 \right] dt =$$

$$= \left| \; d(t+1) = dt \; \right| = \int_0^1 \left[\tfrac{9}{2}(t+1)^2 + 2(t+1)^3 \right] d(t+1) =$$

$$= \frac{9}{2} \frac{(t+1)^3}{3} \Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{(t+1)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{9}{6}(8-1) + \frac{1}{2}(16-1)$$

$$= \frac{63}{6} + \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{108}{6} = 18$$ traženo rješenje

Zadaci za vježbu

Vektorsko polje, divergencija i rotor

4401. Naći vektorske linije homogenog polja $\boldsymbol{A}(P)=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ (a, b i c su konstante).

4402. Naći vektorske linije ravnog polja $\boldsymbol{A}(P)=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$, ($\omega$ je konstanta).

4403. Naći vektorske linije polja $\boldsymbol{A}(P)=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$ (ω i h su konstante).

4404. Naći vektorske linije polja:

1) $\boldsymbol{A}(P)=(y+z)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{A}(P)=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{A}(P)=x(y^2-z^2)\boldsymbol{i}-y(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+z(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

U zadacima 4405 — 4408 izračunati divergenciju i rotor datih vektorskih polja.

4405. $\boldsymbol{A}(P)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

4406. $\boldsymbol{A}(P)=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

4407. $\boldsymbol{A}(P)=x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}+xyz^2\boldsymbol{k}$.

4408. $\boldsymbol{A}(P)=\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$.

4409. Sila $F\boldsymbol{i}$ konstantnog intenziteta F obrazuje vektorsko polje; izračunati divergenciju i rotor toga polja.

Rješenja

4401. Prave paralelne vektoru $\boldsymbol{A}\{a, b, c,\}$: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

4402. Krugovi sa centrom u koordinatnom početku.

4403. Zavojnice sa visinom hoda $\dfrac{2\pi h}{\omega}$, koje leže na cilindrima čije se ose poklapaju sa z-osom: $x=R\cos(\omega t+\alpha)$, $y=R\sin(\omega t+\alpha)$, $z=ht+z_0$, pri čemu su R, α i z_0 proizvoljne konstante.

4404. 1) Krugovi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y-z+C=0$, po kojima ravni paralelne simetralnoj ravni $y-z=0$ presecaju sfere sa zajedničkim centrom u koordinatnom početku (R i C su proizvoljne konstante.

2) Krugovi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$ po kojima ravni, koje od koordinatnih osa odsecaju odsečke iste dužine i znaka, presecaju sfere sa zajedničkim controm u koordinatnom početku.

3) Krive po kojima se presecaju sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ i hiperbolični paraboloidi $zy=Cx$.

4405. div $\boldsymbol{A}=3$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4406. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=2[(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}]$.

4407. div $\boldsymbol{A}=6xyz$, rot $\boldsymbol{A}=x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}$.

4408. div $\boldsymbol{A}=6$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4409. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4410. Ravno vektorsko polje definisano je silom obrnuto proporcionalnom kvadratu odstojanja njene napadne tačke od koordinatnog početka i usmerenom prema koordinatnom početku (npr. ravno električno polje obrazovano naelektrisanom materijalnom tačkom); naći divergenciju i rotor polja.

4411. Naći divergenciju i rotor prostranog polja ako je sila polja podčinjena istim uslovima kao i u zadatku 4410.

4412. Vektorsko polje je definisano silom obrnuto proporcionalnom odstupanju njene napadne tačke od z-ose, normalnom na tu osu i usmerenom prema njoj; izračunati divergenciju i rotor toga polja.

4413. Vektorsko polje je definisano silom obrnuto proporcionalnom odstojanju njene napadne tačke od ravni xOy i usmerenom prema koordinatnom početku; izračunati divergenciju tog polja.

4414. Izračunati div $(a\boldsymbol{r})$ ako je a konstantan skalar.

4415. Dokazati relaciju

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi),$$

u kojoj je $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skalarna funkcija.

4416. Izračunati div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$ i div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$ ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstantni vektori.

4417. Izračunati div $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$ ako je $\boldsymbol{r}$ konstantan vektor.

4418. Ne prelazeći na koordinate izračunati divergenciju vektorskog polja:

1) $\boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a}r^2$, 2) $\boldsymbol{A}(P) = \dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$,

3) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$

Rješenja

4410. div $\boldsymbol{A} = \dfrac{k}{r^2}$, gde je k koeficijent proporcionalnosti, a r—odstojanje napadne tačke sile od koordinatnog početka; rot $\boldsymbol{A} = 0$.

4411. div $\boldsymbol{A} = 0$, rot $\boldsymbol{A} = 0$.

4412. div $\boldsymbol{A} = 0$, rot $\boldsymbol{A} = 0$. U tačkama z-ose polje nije definisano.

4413. div $\boldsymbol{A} = -\dfrac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gde je k koeficijent proporcionalnosti. U tačkama ravni Oxy polje nije definisano.

4414. $3a$. **4416.** div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$, div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}) = 4(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$.

4417. 0. **4418.** 1) 0. 2) 0. 3) 0.

4419. Izračunati divergenciju vektorskog polja

$$A(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Dokazati da je divergencija ovog polja jednaka nuli samo onda kad je $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{r^2}$ ako je polje prostorno, i $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}$ ako je polje ravno, pri čemu je C proizvoljna skalarna konstanta.

4420. Dokazati da je

$$\operatorname{rot}[A_1(P) + A_2(P)] = \operatorname{rot} A_1(P) + \operatorname{rot} A_2(P).$$

4421. Izračunati $\operatorname{rot}[\varphi A(P)]$, ako je $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skalarna funkcija.

4422. Izračunati $\operatorname{rot} r\boldsymbol{a}$ ako je r intenzitet vektora položaja tačke, a $\boldsymbol{a}$ je konstantan vektor.

4423. Izračunati $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ ako je $\boldsymbol{a}$ konstantan vektor.

4424. Kruto telo obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose: naći divergenciju i rotor polja linearnih brzina.

4425. Dokazati relaciju

$$\boldsymbol{n}(\operatorname{grad}(A\boldsymbol{n}) - \operatorname{rot}(A \times \boldsymbol{n})) = \operatorname{div} A,$$

ako je $\boldsymbol{n}$ jedinični konstantan vektor.

Diferencijalne operacije vektorske analize (grad, div, rot) zgodno je obeležavati pomoću simboličnog vektora ∇ (Hamiltonov „nabla“ operator):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Primenu ovog operatora na ovu ili onu (skalarnu ili vektorsku veličinu) treba shvatiti ovako: po pravilima vektorske algebre treba pomnožiti vektor ∇ datom veličinom, a zatim množenje simbola $\frac{\partial}{\partial x}$ i tsl. veličinom S shvatiti kao izračunavanje odgovarajućeg izvoda. Tada je $\operatorname{grad} u = \nabla u$; $\operatorname{div} A = \nabla A$; $\operatorname{rot} A = \nabla \times A$.

Pomoću Hamiltonova operatora mogu se predstaviti i diferencijalne operacije drugog reda: $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla\nabla u$; $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u$; $\operatorname{grad}\operatorname{div} A = \nabla(\nabla A)$; $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = \nabla(\nabla \times A)$; $\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \nabla \times (\nabla \times A)$.

4426. Dokazati da je $\boldsymbol{r} \cdot \nabla r^n = n r^n$, pri čemu je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja tačke.

4427. Dokazati relacije:

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0$.

4428. Dokazati da je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Ovaj se izraz naziva Laplasovim operatorom i obično se obeležava sa Δu. Pomoću Hamiltonova operatora ova se veličina može pisati u obliku $\Delta u = (\nabla\nabla) u = \nabla^2 u$).

4429. Dokazati da je

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A(P) = \operatorname{grad}\operatorname{div} A(P) - \Delta A(P),$$

pri čemu je

$$\Delta A(P) = \Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k}.$$

4430. Vektorsko polje definisano je konstantnim vektorom A; uveriti se da to polje ima potencijal i naći taj potencijal.

4431. Vektorsko polje definisano je silom proporcionalnom odstojanju napadne tačke od koordinatnog početka i usmerenom prema koordinatnom početku; pokazati da je to polje konzervativno i naći njegov potencijal.

4432. Sile polja su obrnuto proporcionalne odstojanju njihovih napadnih tačaka od ravni Oxy i usmerene su prema koordinatnom početku; hoće li polje biti konzervativno?

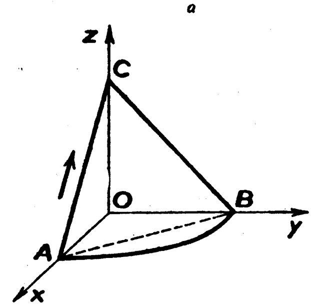
4433. Sile polja su obrnuto proporcionalne kvadratu odstojanja njihovih napadnih tačaka od z-ose i usmerene prema koordinatnom početku; hoće li polje biti konzervativno?

4434. Vektorsko polje definisano je silom obrnuto proporcionalnom odstojanju njene napadne tačke od z-ose, normalnom na tu osu i usmerenom ka njoj; pokazati da je to polje konzervativno i naći njegov potencijal.

4435. Linearne brzine tačaka krutog tela koje se obrće oko neke ose obrazuju vektorsko polje; je li to polje potencijalno?

4436. Sile polja definisane su ovako: $A(P)=f(r)\dfrac{r}{r}$ (tzv. centralno polje; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$); pokazati da je potencijal polja: $u(x, y, z)=\int_a^r f(r)\,dr$ i odavde kao specijalan slučaj izvesti potencijal polja sila privlačenja koje potiču od tačkaste mase, i potencijal polja u zadatku 4431.

4437. Naći rad sila polja $A(p)=xy\,i+yz\,j+xz\,k$ pri pomeranju tačke po zatvorenoj krivoj koja se sastoji iz odsečka prave $x+z=1$, $y=0$, četvrtine kružne linije $x^2+y^2=1$, $z=0$, i odsečka prave $y+z=1$, $x=0$ (sl. 78), — u smeru naznačenom na slici. Koliki će biti taj rad ako se luk BA zameni izlomljenom linijom BOA ili pravolinijskim odsečkom BA?



Sl. 78

Rješenja

4419. div $A=\dfrac{2f(r)}{r}+f'(r)$, ako je polje prostorno, i div $A=\dfrac{f(r)}{r}+f'(r)$ ako je polje ravno.

4421. φ rot $A+(\text{grad }\varphi\times A)$. **4422.** $\dfrac{r\times A}{r}$.

4423. $2a$. **4424.** $\omega\, n_0$, gde je n_0 jedinični vektor paralelan osi obrtanja.

4430. $u=A\,r+C$. **4431.** $u=-\dfrac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)+C$. **4432.** Neće. **4433.** Neće.

4434. $u=-\dfrac{1}{2}\ln x^2+y^2)+C$. **4435.** Nema.

4437. $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$. **4438.** $k\delta\ln\dfrac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.